ный от нуля, то группа симметрий уравнения (I) (если таковая имеется) не может иметь размерность большую 6-и. Следовательно, все перечисленные коэффициенты - нули. Но в этом случае все остальные инварианты уравнения (I) становятся относительными инвариантами. Повторив вышеприведенные рассуждения, приходим к выводу, что и они неизбежно должны обращаться в нуль, что и доказывает необходимость предложения I.

П. Пусть теперь все дифференциальные инварианты уравнения (I) - нули. Уравнения структуры (4) в этом случае примут вид:

$$\begin{cases} \mathcal{D}\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^1_1, \quad \mathcal{D}\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^2_1 + \omega^2 \wedge \omega^2_2, \\ \mathcal{D}\omega^2_1 = \omega^2_1 \wedge (\omega^2_2 - \omega^1_1) + \omega^1 \wedge \omega^2_{11} + \omega^2 \wedge \omega^1_{11}, \\ \mathcal{D}\omega^2_{11} = \omega^2_{11} \wedge (\omega^2_2 - 2\omega^1_1) + \omega^2_1 \wedge \omega^1_{11}, \\ \mathcal{D}\omega^1_1 = \omega^1 \wedge \omega^1_{11}, \ \mathcal{D}\omega^2_2 = \omega^1 \wedge \omega^1_{11}, \ \mathcal{D}\omega^1_{11} = \omega^1_1 \wedge \omega^1_{11}. \end{cases} \tag{8}$$

Но структурные уравнения (8) определяют [1] 7-мерную группу преобразований:

$$\tilde{x} = \frac{a^1_1 x + a^1_2}{a^2_1 x + a^2_2}, \quad \tilde{y} = \frac{ay + a_0 x^2 + a_1 x + a_2}{(a^2_1 x + a^2_2)^2}, \tag{9}$$

где $\det(a^c_d) = 1$; $c, d = 1, 2$.

Таким образом, предложение I полностью доказано.

Известно [2] , что обыкновенное дифференциальное уравнение 3-го порядка (1) допускает 7-мерную группу точечных симметрий в том и только в том случае, когда оно эквивалентно уравнению (2). Поэтому, в силу предложения I, имеет место

П р е д л о ж е н и е 2. Уравнение (I) точечной аналитической заменой координат приводимо к (2) тогда и только тогда, когда все его дифференциальные инварианты - нули.

Несложно показать, что обращение в нуль инвариантов k_4, e_4, a_3, c_1 является достаточным (и, разумеется, необходимым) для обращения в нуль полной системы (6) дифференциальных инвариантов уравнения (I).

Припишем переменным x, y, y', y'' номера I, 2, 3, 4 соответственно и введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1, \ \frac{\partial f}{\partial y} = f_2, \ \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = f_{12}, \ \ldots$$

Вычисление инвариантов k_4, e_4, a_3, c_1 в координатной форме приводит, в силу предложения 2, к следующему утверждению:

Т е о р е м а. Уравнение (I) точечной аналитической заменой координат приводимо к (2) в том и только в том случае, когда выполняются условия:

$$\begin{cases} 1)\ f_{444} = 0, \qquad 2)\ (f_{44})^2 + 6 \cdot f_{443} = 0, \\ 3)\ 3f_{33} - 3f_3 \cdot f_{44} - 6f_{42} + 2f_4 \cdot f_{43} - \frac{1}{3}(f_4)^2 \cdot f_{44} + \\ \quad + f_{44} \cdot (f_{41} + f_{42} \cdot y' + f_{43} \cdot y'' + f_{44} \cdot f) = 0, \\ 4)\ 6f_2 + 2f_3 \cdot f_4 + \frac{4}{9}(f_4)^3 - 2f_4 \cdot (f_{41} + f_{42} \cdot y' + f_{43} \cdot y'') - \\ \quad - f \cdot f_4 \cdot f_{44} + f_{42} \cdot y'' - 2f \cdot f_{43} + f_{44} \cdot (f_1 + f_2 \cdot y' + f_3 \cdot y'') - \\ \quad - 3f_{31} - 3f_{32} y' - 3f_{33} \cdot y'' + f_{411} + 2f_{421} \cdot y' + 2f_{431} \cdot y'' + \\ + 2f \cdot f_{441} + f_{422}(y')^2 + 2f_{432} \cdot y' \cdot y'' + 2f \cdot f_{442} \cdot y' + f_{433}(y'')^2 + 2f \cdot f_{443} \cdot y'' = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Библиографический список

1. Cartan E. Les sous-groupes des groupes continus de transformations // Oeuvres complétes. Paris, 1953. V. 2. P. 2.

2. Omri Gat. Symmetry algebras of third-order ordinary differential equations // Journal of Math. Physics, 1992. V. 33. № 9. P. 2966-2971.

УДК 514.763.8

О ПАРАКЕЛЕРОВОСТИ 6-МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

М.Б.Б а н а р у

(Смоленский государственный педагогический институт)

Известный американский математик Альфред Грей отметил [1] , что ключом к геометрии почти эрмитовых многообразий являются тождества, которым удовлетворяет их тензор римановой кривизны (тензор Римана-Кристофеля). В соответствии с этим он выделил несколько классов почти эрмитовых многообразий, характеризуемых следующими тождествами:

класс R1 $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(X,Y)JZ, JW\rangle$,

класс R2 $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(JX,JY)Z, W\rangle + \langle R(JX,Y)JZ, W\rangle + \langle R(JX,Y)Z, JW\rangle$,

класс R3 $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(JX,JY)JZ, JW\rangle$.

Многообразия класса R1 изучались рядом авторов под названием паракелеровых многообразий [2] или F-пространств [3], многооообразия класса $R3$ – под названием RK-многообразий [4]. А.Грей доказал, что $R1\subset R2\subset R3$, причем келеровы многообразия принадлежат классу $R1$.

Отметим, что известно очень мало примеров почти эрмитовых многообразий класса $R1$, отличных от келеровых. В настоящей работе мы существенно расширяем число таких примеров, показав, что многообразиями класса $R1$ являются и 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры октав. Напомним, что многообразие M^{2n}, наделенное почти комплексной структурой J и римановой метрикой $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$, называется эрмитовым при выполнении условий:

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X,Y\rangle,$$

$$[X,Y]+J[JX,Y]+J[X,JY]-[JX,JY]=0 \quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$

В [6] автором вычислен спектр тензора (это понятие ввел В.Ф.Кириченко в [5]) римановой кривизны эрмитовых 6-мерных подмногообразий общего вида алгебры октав. Показано, что

$$R_{abcd}=R_{\hat a bcd}=R_{\hat a\hat b cd}=0,\quad R_{\hat a b\hat c d}=-\sum_\varphi T^\varphi_{\hat a\hat c}T^\varphi_{bd},$$

где T^φ_{ab} – компоненты конфигурационного тензора. Здесь

$$a,b,c,d=1,2,3;\quad \hat a=a+3,\quad \varphi=7,8.$$

I. Вначале покажем, что рассматриваемые многообразия являются RK-многообразиями. Достаточно провести такие рассуждения:

1. $R_{abcd}=\langle R(e_a,e_b)e_c,e_d\rangle$,

$$\langle R(Je_a,Je_b)Je_c,Je_d\rangle=\langle R(ie_a,ie_b)ie_c,ie_d\rangle=$$
$$=i^4\cdot\langle R(e_a,e_b)e_c,e_d\rangle=\langle R(e_a,e_b)e_c,e_d\rangle,$$

что, разумеется, имеет место всегда.

2. $R_{\hat a\hat b cd}=\langle R(e_{\hat a},e_{\hat b})e_c,e_d\rangle$,

$$\langle R(Je_{\hat a},Je_{\hat b})Je_c,Je_d\rangle=\langle R(-ie_{\hat a},-ie_{\hat b})ie_c,ie_d\rangle=$$
$$=i^2(-i)^2\cdot\langle R(e_{\hat a},e_{\hat b})e_c,e_d\rangle=\langle R(e_{\hat a},e_{\hat b})e_c,e_d\rangle,$$

что также выполняется всегда.

3. $R_{\hat a b\hat c d}=\langle R(e_{\hat a},e_b)e_{\hat c},e_d\rangle$,

$$\langle R(Je_{\hat a},Je_b)Je_{\hat c},Je_d\rangle=\langle R(-ie_{\hat a},ie_b)(-ie_{\hat c}),ie_d\rangle=$$
$$=i^2(-i)^2\langle R(e_{\hat a},e_b)e_{\hat c},e_d\rangle=\langle R(e_{\hat a},e_b)e_{\hat c},e_d\rangle,$$

что также всегда имеет место. Наконец,

4. $R_{\hat a bcd}=\langle R(e_{\hat a},e_b)e_c,e_d\rangle$,

$$\langle R(Je_{\hat a},Je_b)Je_c,Je_d\rangle=\langle R(-ie_{\hat a},ie_b)ie_c,ie_d\rangle=$$
$$=(-i)i^3\cdot\langle R(e_{\hat a},e_b)e_c,e_d\rangle=-\langle R(e_{\hat a},e_b)e_c,e_d\rangle=-R_{\hat a bcd},$$

что, как очевидно, имеет место в том и только в том случае, если $R_{\hat a bcd}=0$. Последнее равенство, как мы отмечали, установлено в [6], и, стало быть, доказана

Т е о р е м а I. Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Гревса-Кэли является RK-многообразием.

II. Но, как оказалось, справедливо и более сильное утверждение:

Т е о р е м а 2. Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Гревса-Кэли является паракелеровым (т.е. принадлежит классу $R1$).

В самом деле, если провести следующие рассуждения:

1. $\langle R(e_a,e_b)Je_c,Je_d\rangle=\langle R(e_a,e_b)ie_c,ie_d\rangle=$
$$=i^2\langle R(e_a,e_b)e_c,e_d\rangle=-\langle R(e_a,e_b)e_c,e_d\rangle,$$

2. $\langle R(e_{\hat a},e_{\hat b})Je_c,Je_d\rangle=\langle R(e_{\hat a},e_{\hat b})ie_c,ie_d\rangle=$
$$=i^2\langle R(e_{\hat a},e_{\hat b})e_c,e_d\rangle=-\langle R(e_{\hat a},e_{\hat b})e_c,e_d\rangle,$$

3. $\langle R(e_{\hat a},e_b)Je_c,Je_d\rangle=\langle R(e_{\hat a},e_b)ie_c,ie_d\rangle=$
$$=i^2\langle R(e_{\hat a},e_b)e_c,e_d\rangle=-\langle R(e_{\hat a},e_b)e_c,e_d\rangle,$$

4. $\langle R(e_{\hat a},e_b)Je_{\hat c},Je_d\rangle=\langle R(e_{\hat a},e_b)(-ie_{\hat c}),ie_d\rangle=$
$$=-i\cdot i\cdot\langle R(e_{\hat a},e_b)e_{\hat c},e_d\rangle=\langle R(e_{\hat a},e_b)e_{\hat c},e_d\rangle,$$

то мы убедимся, что условие паракелеровости равносильно тому, что

$$R_{abcd}=R_{\hat a bcd}=R_{\hat a\hat b cd}=0.$$

Поскольку последние равенства имеют место [6], то теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Равенство $R_{\hat a bcd}=0$, как видно из доказательства теоремы I, является критерием того, чтобы произвольное (не обязательно эрмитово!) 6-мерное подмногообразие алгебры октав являлось RK-многообразием. Точно также из доказательства теоремы 2 следует, что критерием паракелеровости произвольного подмногообразия алгебры октав является условие:

$$R_{abcd}=R_{\hat a bcd}=R_{\hat a\hat b cd}=0.$$

2 Зак. 1296

Библиографический список

I. Gray A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tôhoku Math. J. 1976. V.28. №4. P. 601–612.

2. Rizza G.B. Varieta parakahleriane // Ann. Math., Pure and Appl. 1974. V. 98. №4. P. 47–61.

3. Sawaki S., Sekigawa K. Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature // J. Differential Geom. 1974. V. 9. P. 123–134.

4. Vanhecke L. Almost Hermitian manifolds with J-invariant Riemann curvature tensor // Red. Semin. Math. Univ. e politecn. Torino, 1975–1977. V. 34. P. 487–498.

5. К и р и ч е н к о В.Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1986. Т.18. С.25-72.

6. Б а н а р у М.Б. О почти эрмитовых структурах, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли / Смоленский пединститут. Деп. в ВИНИТИ 14.05. 1993. № 1283 - В93.

УДК 514.77

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА АСИМПТОТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ПРОСТЕЙШИХ ПОЛНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

И.Б.Б а р с к и й

(Марийский государственный педагогический институт)

В работе рассматривается структура асимптотических сетей, некоторые необходимые и достаточные условия их глобальной правильности на отдельных классах простейших поверхностей с ограниченными производными, поведение характеристик на бесконечности и связь их образов с границей нормального образа поверхности.

§ 1. Основные понятия

Пусть односвязная простейшая гиперболическая поверхность F задана на всей плоскости xy уравнением $z=f(x,y)$ и имеет предельный конус $A(F)$. Тогда конус $A(F)$ имеет взаимно однозначное сферическое изображение $A^*(F)=\bar{F}^*$. Пусть кривая Ω^* – граница области $A^*(F)$, тогда Ω^* будет четырехугольником типа астроиды, который может выродиться в криволинейный треугольник со сторонами, обращенными выпуклостью вовнутрь, или двуугольник, состоящий из двух больших полуокружностей (теорема А.Л.Вернера [1]). Построение нормального образа поверхности будем выполнять как и в работе [2]. Понятие вогнутой опоры приводится в работе [3], а остальные понятия – в работе [4].

О п р е д е л е н и е. Предельным поворотом $\tilde{\theta}(L)$ непрерывного невырожденного векторного поля касательного вектора на ориентированной дуге L характеристики λ назовем предел, если он существует, приращения угловой функции $\tilde{\theta}(L)$ на промежутке $[a;b)$, где b может быть бесконечностью.

Мы будем рассматривать односвязные простейшие гиперболические поверхности F [1], заданные уравнением

$$z=z(x,y) \qquad (1)$$

удовлетворяющие условиям: поверхность F проектируется на плоскость x,y взаимно однозначно, гауссова кривизна $K<0$ и выполняется условие

$$z_x^2+z_y^2<+\infty. \qquad (2)$$

Как обычно будем обозначать $p=z_x$, $q=z_y$.

§2. Некоторые предложения по структуре асимптотической сети и углов нормального образа

Рассмотрим векторное поле касательного вектора к асимптотическим линиям λ^α поверхности F. В силу задания поверхности, будем, следуя Н.В.Ефимову [3], рассматривать проекции этих линий на плоскость x,y и, следовательно, рассматривать поле касательного вектора характеристик соответственно первого и второго семейства. Соблюдая терминологию и обозначения [4], обозначим эти семейства соответственно σ_1 и σ_2. Тогда вектор касательного направления к характеристикам будет иметь направление (dx, dy). Нормальный образ каждой характеристики в соответствующей точке будет иметь касательное направление (dp, dq).

Л е м м а 1. Поворот векторного поля касательного вектора характеристик простейших гиперболических поверхностей (1) равен повороту поля касательного вектора нормального образа.